

XX Marató de Problemes

4 de març 2014

Organitzadors: Xavier Fernández-Real, Guillem Alsina, Gerard Neras, Eduard Vázquez, Ivan Geffner

Bloc I - Beach pls...

3.- Per escalfar juguem al tennis!

L'Eli i la Clara van jugar un set de tennis en el qual la Clara va acabar guanyant 6-3. Se sap que exactament cinc vegades s'ha trencat el servei durant el partit. Sabríeu dir qui ha començat sacant?

4.- Pobres CFISos...

Fa uns anys, a l'examen d'accés del CFIS, el Gran E [Lord of FME] va posar la següent pregunta: "És possible construir un pentàgon regular utilitzant quatre escuradents sense trencar-los o deformar-los de cap manera?". Es rumoreja que ningú l'ha sabut resoldre. Us veieu capaços?

8.- Èpic Duel

El Dirbaio està molt enfadat per haver perdut el premi a la més guapa. En conseqüència decideix desafiar l'Èlia a un duel de programació, que consisteix en picar 5 programes el més ràpid possible. Com que l'Èlia està a primer ella pica una mica més lent i fa un programa cada 30 minuts, mentre que el Dirbaio en fa un cada 20 (els faria més ràpid si no fes el troll). El problema és que el Dirbaio s'adorm el dia del duel i arriba 1h tard, però tot i així l'Èlia pensa el següent: "Cada cop que el Dirbaio arribi fins on estigui ara jo hauré avançat una mica, quan arribi a on jo estigui després jo hauré avançat encara una miqueta més, i si seguim així mai podrà avançar-me i guanyaré segur." Vosaltres què creieu, que el Dirbaio guanyarà, o que l'Ivan i l'Àlex han de canviar al Dirbaio per l'Èlia?

9.- Tresor!

El Mayo, el Jaume i el Picart, per ser uns viciats de One Piece, han sortit a alta mar a la cerca d'aventures. Finalment arriben a una illa on troben tres cofres de tresor, un daurat, un platejat, i un negre. El cofre daurat té escrit "El tresor no està al cofre negre", el negre té "El tresor està aquí", mentre que el platejat té "El tresor no està aquí". Un habitant de l'illa els adverteix que només un dels tres cofres té escrita la veritat, i que si obren el que no és s'hauran de dedicar tot el que queda de les seves vides a l'estadística (en altres paraules, no hi ha marge d'error). Sabríeu dir quin cofre haurien d'obrir?

14.- Mindblow!

L'Ivan creu que tant ell mateix com en Xevi estan sonats. Si el que creuen els sonats és sempre fals, i el que creuen els assenyats és sempre cert... Què són en Xevi i l'Ivan, sonats o assenyats?

23.- El cub dels primers!

Sabríeu col·locar sobre cada vèrtex d'un cub un nombre entre 0 i 7, de manera que no hi hagi nombres repetits i de manera que cada parell de vèrtexs adjacents sumi un nombre primer?

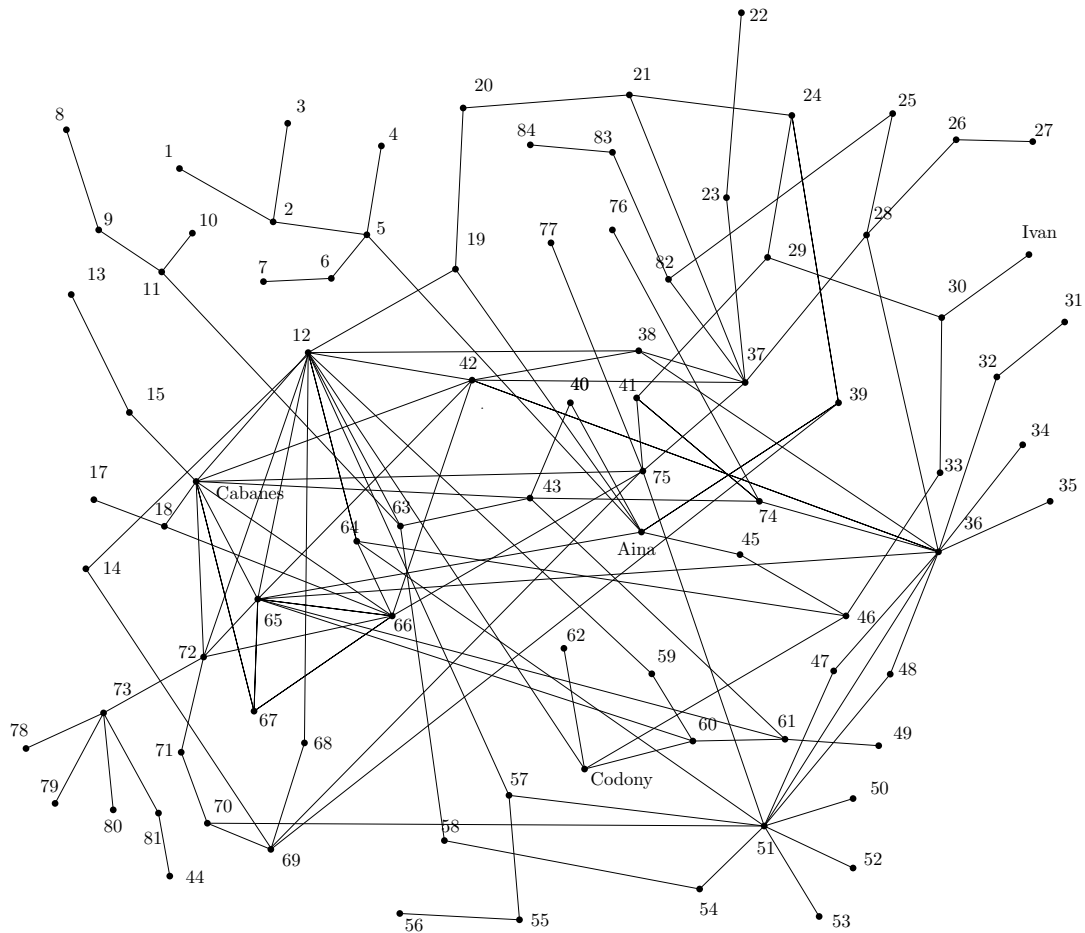
XX Marató de Problemes

4 de març 2014

Organitzadors: Xavier Fernández-Real, Guillem Alsina, Gerard Neras, Eduard Vázquez, Ivan Geffner

Bloc II - Caaan you feeeeeeel da looooooolz toniiiiight?

Les preguntes que hi ha en aquest bloc estan totes relacionades amb el graf següent



Aquesta imatge representa un (sub)graf fictici de la FME, on per motius de *copyright* no podem escriure tots els noms (tranquils, que això no consisteix en trobar-los...). Avisem que qualsevol semblança amb la realitat és pura coincidència!

3.- Això és NP...

Sabríeu dir-me la longitud del cicle més gran del graf?

4.- En aquest graf això també és NP...

I quin és el node de grau màxim? [Amb el nombre d'arestes més gran]

8.- I això què hauria d'importar?

És bipartit? [Que es pugui dividir en dos de manera que no hi hagi arestes connectant nodes de la mateixa part]

9.- A saber com es calcula...

Quin és el diàmetre del graf i quins nodes el formen? [El parell de nodes tal que el camí mínim des d'un fins l'altre sigui el més gran possible]

14.- Això cada cop es lia més!

Quin és el centre del graf i quin és el radi? [El node del qual la distància al seu node més llunyà sigui la mínima possible i aquesta distància, respectivament]

23.- Eule-què?

Quantes arestes caldria afegir com a mínim per tal que el graf resultant sigui eulerià? [És a dir, que existeixi un cycle que passi per totes les arestes només un cop].

Extra.- Imagina't com serà...

És el graf planar?

XX Marató de Problemes

4 de març 2014

Organitzadors: Xavier Fernández-Real, Guillem Alsina, Gerard Neras, Eduard Vázquez, Ivan Geffner

Bloc III - Tots són casos particulars del Teorema de Stutgarden

3.- Lletres i nombres

L'Ivan s'avorreix tant a les classes del màster que es dedica a classificar les lletres i les xifres del sistema decimal topològicament (per exemple la O i la D són el mateix). Podeu ajudar-lo en aquesta difícil tasca?

4.- Com si no n'hi hagués prou...

La Carla i la Xènia s'estan barallant per l'última rajola de xocolata del berenar de la marató. Al final, com que cap de les dues vol partir-la, decideixen jugar-se-la en un joc que consisteix en el següent: per torns la Carla i la Xènia van partint la xocolata per una fila o una columna i s'emporten un dels dos trossos resultants de la divisió, i perd qui es quedi amb l'últim rectanglet de xocolata i li ha de donar tota la xocolata a l'altra. Sabent que la xocolata té dimensions 14×11 i que comença la Carla, quina de les dos té més possibilitats de guanyar?

8.- Tornar a primària!

L'Edu últimament ha après tantes mates avançades que s'ha oblidat de les coses més elementals. Es va adonar d'això arran de l'examen de Geometria Algebraica, on després de trobar uns quants punts d'una corba el·líptica, no podia operar amb ells perquè no recordava com sumar fraccions. Mentre repassava aquestes operacions elementals, es va adonar que $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$, i aleshores es va preguntar si existirien més maneres de sumar 1 amb fraccions diferents i de la forma $1/k$. El podríes ajudar dient per quines n existeixen n nombres diferents, tals que els seus inversos sumin 1?

9.- De quina mitjana parlem?

El Dani va cada dia a correr per Collserola. Un cert dia d'estiu va fer un seguiment de la ruta amb el seu mòbil i es va adonar que va pujar a un ritme de 8 km/h, mentres que va baixar a 12 km/h. Sabent que va pujar i baixar pel mateix camí, podríes ajudar al Dani a calcular la seva velocitat mitjana?

14.- S'ha de fer bé que estem en crisi!

La Paula i l'Anna estan fent un sopar de lleties i cadascuna hi ha aportat 200g i 300g respectivament. Això que apareixen la Marina i la Clàudia com a convidades. Quan acaben de sopar cadascuna dona a la Paula i l'Anna 5 euros en agraïment, com s'han de repartir entre elles els 10 euros de forma que sigui la més justa possible?

23.- El somni del Cassius

El Cassius des de molt petit sempre ha volgut crear un teorema amb el seu nom. Llavors cada dia el que fa és que intenta trobar propietats de les coses més elementals, i després de trobar-ne comprova a la Wikipedia que, efectivament, ja havien estat demostrades abans (generalment en temps dels grecs...). L'última propietat que ha trobat és la següent: si n és un natural més gran que 2, i escrius totes les fraccions $1/n, 2/n, \dots, n/n$, que el nombre de fraccions irreductibles sempre és parell. El Cassius tenia la idea que això podia no estar provat ja que li va costar molt de temps i esforç, i la seva demostració ocupava 20 pàgines. Creus que existeix alguna demostració més simple?

XX Marató de Problemes

4 de març 2014

Organitzadors: Xavier Fernández-Real, Guillem Alsina, Gerard Neras, Eduard Vázquez, Ivan Geffner

Bloc IV - Aquí comença la part seriosa

3.- Jo crec que són iguals...

Durant les reunions del viatge que fan els de 3r/4t, sempre hi ha “tensions” i de qualsevol cosa es fa una discussió. Tant és així, que l'altre dia l'Aina i el Petar es van passar tota la reunió discutint perquè l'Aina deia que 2014^{2013} era més gran que 2013^{2014} , mentre que el Petar deia que no. [Cal dir que això no tenia res a veure amb el viatge, però igualment és un bon motiu per discutir]. Pots ajudar a acabar la discussió dient qui dels dos té raó?

4.- Aquí són quatre gats...

A la FME es fa una enquesta sobre gustos i es pregunta sobre n coses diferents amb úniques possibles opcions ‘Sí’ i ‘No’. Es coneix que no hi ha dos estudiants de la FME tals que no tinguin gustos en comú, ja que d'altra banda no s'explicaria la densitat del graf, i que tampoc n'hi ha dos amb les mateixes respostes. Amb aquesta informació, quants estudiants pot tenir com a molt la FME?

8.- Així serà el nostre futur?

És conegut que molta gent que surt de la FME acaba amb els treballs més exòtics i inimaginables. Per exemple el Mayo (gran) ho ha deixat tot aquí i se n'ha anat amb la Jenni a l'Índia a viure aventures en parella... Parlant d'aquests dos ara mateix necessiten la teva ajuda, i és que disposen d'un elefant i tres mil plàtans, i amb això volen recórrer 1000 km intentant transportar el màxim nombre de plàtans possible. El problema està en que l'elefant menja 1 plàtan per cada 1km recorregut, i en tot moment només pot portar 1000 plàtans a sobre. Quin és el nombre màxim de plàtans que poden portar d'un lloc a l'altre?

9.- La perfecció només es troba a la imaginació!

Un nombre natural n es diu que és *perfecte* si la suma dels seus divisors, exclòs ell mateix, sumen n . Per exemple 6 es perfecte, ja que $1 + 2 + 3 = 6$. Hi ha una llarga teoria sobre aquests nombres, de fet encara no se sap si n'hi ha infinits o ni tan sols si n'hi ha algun de senar! El cas és que tot i haver-hi tantes preguntes obertes, Euclides va demostrar que si existeix un primer de la forma $2^n - 1$, aleshores el nombre $2^{n-1}(2^n - 1)$ és perfecte. Sabríeu provar-ho?

14.- S'hauria d'haver comprat electrònica

Des de la Delegació d'Estudiants de la FME s'ha acordat a comprar una balança de plats, tot i que encara no se sap per què. Desgraciadament, s'han oblidat de comprar els pesos, amb la qual cosa la balança és ben inútil. Com que no van bé de diners, decideixen comprar només quatre pesos, però amb aquests volen aconseguir trobar la màxima n tal que tots els objectes amb pes enter entre 1 i n es puguin pesar correctament. Quina és aquesta n ?

23.- Això és quasi com el graf de la FME

El Salvi vol pintar les arestes del graf complet K_n de manera que dos arestes incidents (dues! exclama el Salvi) no estiguin pintades del mateix color. Quin és el nombre mínim de colors que ha de fer servir?

XX Marató de Problemes

4 de març 2014

Organitzadors: Xavier Fernández-Real, Guillem Alsina, Gerard Neras, Eduard Vázquez, Ivan Geffner

Bloc V - Si en feu algun ja està bé...

3.- Triangles especials

És conegut per tothom que el triangle de costats 3,4,5 és rectangle, però el triangle de costats 4,5,6 també té una propietat especial! I és que té un angle el doble que un altre! Sabríeu demostrar-ho?

4.- Això és d'àlgebra lineal de primer!

Considerem el nombre $n = 12345678$. Els seus primers vuit múltiples són $2n = 24691356$, $3n = 37037034$, $4n = 49382712$, $5n = 61728390$, $6n = 74074068$, $7n = 86419746$ i $8n = 98765424$. Resulta que n compleix una propietat molt interessant: si fem una matriu 8×8 on escrivim cada múltiple en una fila diferent, amb una xifra per columna, demostra que el seu determinant és múltiple de n .

8.- Codonyópolis

El Codony no ha trigat gaire a instal·lar-se a Brasil. De fet tot just arribar va crear el seu propi casino i s'està fent d'or. Un dels jocs del casino consisteix en tirar monedes enlaire, si el nombre de cares és senar guanya la banca, mentre que si és parell guanya l'apostant. Sembla una aposta justa, però, el Codony ha trucat les monedes per tal que la probabilitat de que surti cara sigui $2/3$. Sabries calcular en funció del nombre de tirades, la probabilitat de guanyar l'aposta?

9.- Successions de Lepe

Lepe és un poble on els habitants són successions que pertanyen a l_p (l_p és el conjunt de successions $\{a_n\}$ tals que $\sum_{n \geq 0} |a_n|^p < \infty$), mentre que Lequ és un poble on els habitants són successions de l_q (amb $q < p$). Demostra que Lequ és un barri de Lepe, però que hi ha gent de Lepe que no és de Lequ.

14.- Màgia al carnestoltes

El Rafa es va dedicar a fer trucs de màgia durant les performances de carnestoltes. Un dels trucs consistia en el següent: primer triava una persona a l'atzar del públic, que curiosament va resultar ser l'Àngel. Després posava un quadrat de 7×7 cartes sobre la taula i l'Àngel en teoria ha de simular ser un personatge que es va movent per sobre d'elles. Comença en una cantonada del quadrat que el Rafa no sap i, a cada torn, llença un dau (que el Rafa pot veure) i es mou tantes posicions com indica el dau en qualsevol direcció cap a cartes adjacents. El Rafa després pot decidir tapar una o cap carta, que indica que per aquella carta ja no es podrà passar. Si el Rafa tapa una carta on estava l'Àngel, aquest mor i el Rafa perd. L'objectiu del Rafa és arraconar a l'Àngel en una casella, que tot i que sembli impossible, ja que el Rafa no sap a on ha començat i cap a on s'ha mogut, al final sempre ho acaba fent. Com s'ho fa el Rafa?

23.- La taja de l'Aina

L'Aina volia anar a classe després del paso de l'Equador, però per desgràcia la pobra no anava gaire bé i li va costar més del que es pensava. La classe es trobava al final d'un passadís enorme amb n portes. Cada minut l'Aina triava una direcció a l'atzar i obria la primera porta que trobava, ja que no podia recordar d'on havia vingut ni quines portes havia obert abans. Quin serà el temps esperat que trigarà a trobar la seva classe?

XX Marató de Problemes

4 de març 2014

Organitzadors: Xavier Fernández-Real, Guillem Alsina, Gerard Neras, Eduard Vázquez, Ivan Geffner

Bloc VI - Si entens l'enunciat ja està bé...

3.- Us juro que això va entrar en un examen de Fonaments, quan la carrera era dura...

Aquesta pregunta va ser tan bèstia que la van haver d'eliminar després de fer les correccions perquè ningú tenia res (true story):

“Un nombre n és de Carmichael si per tot nombre a coprimer amb n se satisfà que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Demostra que si n és de Carmichael, aleshores no és divisible per cap quadrat perfecte.”

És la vostra oportunitat perfecta per saber què recordeu de fonaments!

4.- Ara un de probabilitat...

L'Arnau sap que tots els nombres naturals són interessants, però tot i així creu que n'hi ha alguns més interessants que d'altres. Per ell un nombre és interessant si és la potència d'algun altre nombre (amb exponent més gran que 1, clar). Ell, aleshores, vol veure com estan distribuïts els nombres interessants, per tant vol que responguis la següent pregunta: Si triem un nombre a l'atzar entre 1 i N , quina és la probabilitat que aquest nombre sigui interessant quan N tendeix a infinit?

8.- Sabeu jugar al Tetris?

Suposo que tots sabeu què és el Tetris: Cada tants segons comença a caure una peça aleatòria connexa de quatre quadradets (suposo també que les coneixeu totes!), si s'omple una fila sencera desapareix, i si s'arriba fins a un màxim de files sense omplir es perd. Demostra que en tota partida fins i tot el jugador perfecte de Tetris acaba perdent.

9.- Per conjunts finits és fàcil...

Ja sé que demanar la demostració d'un teorema és *lammer*, però la prova és tan senzilla i elegant que no em puc resistir a proposar-ho com a problema! Demostreu que cap conjunt S es pot posar en correspondència (és a dir que no existeix cap bijecció) amb el conjunt de les seves parts $\mathcal{P}(S)$.

14.- Els nombres irracionals definitivament no molen...

És conegut que donat un nombre irracional α , aleshores la successió $a_n = \{n\alpha\}$ és densa en l'interval $[0, 1]$, on $\{x\}$ és la part decimal de x . En Xavi és una persona molt curiosa i es pregunta si en comptes d'aquesta successió agafem $a_n = 2^n \alpha$, si encara es segueix complint aquesta propietat. Podries ajudar-lo?

23.- El Codony rumia...

El Codony segueix treballant en el seu casino a Sao Paulo, de fet, ara mateix està investigant sobre les probabilitats de guanyar el joc anterior (veure el bloc V) sabent la probabilitat que té cada moneda de sortir cara. Després de tardes i tardes d'experimentació i recerca, va arribar a la conclusió que independentment de com siguin les probabilitats de cada moneda, la probabilitat convergeix sempre cap a $1/2$ quan el nombre de tirades és prou elevat. Podríeu explicar com va arribar a aquesta conclusió el Codony?

XX Marató de Problemes

4 de març 2014

Organitzadors: Xavier Fernández-Real, Guillem Alsina, Gerard Neras, Eduard Vázquez, Ivan Geffner

Bloc VII - Si entens el títol ja esta bé...

3.- Hindus...

L'Arnau, la Carla i el Martí trien cadascú un nombre real positiu a l'atzar x , y i z , i resulta que aquests nombres compleixen que $xyz = x + y + z$. Ara sembla ser que volen calcular $\arctan x + \arctan y + \arctan z$, però s'han deixat les seves super-mega-calculadores a casa. Com ho poden fer?

Nota: Si proposeu un mètode numèric sereu desterrats a l'infern. O pitjor, a Estadística.

4.- I això és el que passa al combinar-se l'àlgebra lineal i la teoria de Galois...

Donada una matriu no singular M de coeficients enters i tal que totes les seves potències estan fitades uniformement en norma (és a dir, que existeix una constant $C > 0$ tal que $\|M^n v\| \leq C\|v\|$ per tot v unitari i $n \geq 1$), sabries demostrar que tots els seus valors propis són arrels de la unitat?

La gràcia del problema està en que el Terry Tao al seu blog ho va deixar com una obvietat en mig de la demostració del Teorema de Gromov... A veure si el podeu treure!

8.- Quan hi ha coses enteres els problemes no poden ser difícils...

Tenim un rectangle subdividit en diversos rectangles més petits amb costats paral·lels als del gran. A més aquests rectangles satisfan que tenen com a mínim un costat de longitud entera. Demostra que també el rectangle gran té com a mínim un costat de longitud entera.

9.- Fes física, li deien a en Guillem, no està tan malament, deien...

Les classes de física han tornat completament boig en Guillem, ha agafat un pot de pintura blanca i un de pintura negra (ambdós amb capacitat infinita) i s'ha posat a desplaçar-se com la formiga de Langton: el pobre Guillem creu que viu en un món bidimensional dividit en caselles quadrades d'1m de costat inicialment pintades de blanc o negre. Ell comença en una d'aquestes caselles mirant en direcció a un dels seus costats i comença a desplaçar-se segons les següents normes: si la casella on es troba és de color blanc, fa un gir sobre si mateix de 90° a la dreta, pinta la casella de color negre i avança a la casella que té al davant. Si en canvi es troba en una casella negra, gira 90° a l'esquerra, pinta la casella de color blanc i avança a la casella que té al davant. Demostra que independentment de com estiguin pintades les caselles inicialment, el camí que recorri en el seu món imaginari serà no fitat (és a dir, en el nostre món acabarà sumergint-se en algun mar o oceà on per fi podrà descansar de la física).

14.- Com es fa això?

Trobeu com es pot construir qualsevol nombre natural utilitzant exactament tres dosos i operacions matemàtiques.

23.- Numeració de la marató

El Gerard es va fumar tot lo inimaginable per numerar els problemes de la marató. Sabries dir de quina manera ha triat els nombres dels problemes?